Instituto Politécnico do Porto

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Electrotécnica

Curso de Engenharia Electrotécnica – Electrónica e Computadores

Disciplina de FEELE

Caderno de Exercícios

Grupo de Disciplinas de Ciências Básicas de Electrotecnia

Outubro de 2006

ÍNDICE

CIRCUITOS BÁSICOS

Exercícios Resolvidos:

1.

Calcule a resistência de uma barra de cobre com 3 m de comprimento, 0,5 cm de largura e 3 cm de altura.

Resolução:

- Secção:

S = $(0,5.10^{-2}).(3.10^{-2})$ = 1,5.10-4 m^2

- Resistência:

$\rho = 1,72.10^{-8}$ Ω.m (A partir da tabela)

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{(1,72 \cdot 10^{-8}) \cdot 3}{1,5 \cdot 10^{-4}} = 344\ \mu\Omega$$

R = 344 μΩ

2.

Determine a resistência de um cabo de alumínio de 200 m de comprimento e 1 mm de diâmetro, a 35º C de temperatura.

Resolução:

- Secção:

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 = 7,85 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^2$$

- Resistência a 20º C:

$$R_{20} = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{(2{,}83 \cdot 10^{-8}) \cdot 200}{7{,}85 \cdot 10^{-7}} = 7{,}21\,\Omega$$

- Resistência a 35º C:

$\alpha = 0{,}00391º\ C^{-1}$ (A partir da tabela)

$$R_{35} = R_{20} \cdot \left[1 + \alpha \cdot (T_{35} - T_{20})\right] = 7{,}21 \cdot \left[1 + 0{,}00391 \cdot (35 - 20)\right] = 7{,}63\,\Omega$$

R = 7,63 Ω

3.

Sabendo que uma determinada resistência apresenta um valor nominal de 100 Ω com uma tolerância de 5%, calcule os valores possíveis para a corrente que a atravessa se lhe for aplicada uma tensão de 10 V.

Resolução:

- Limites da resistência:

$$R_{MAX} = R + R \cdot 0{,}05 = 105\,\Omega$$

$$R_{MIN} = R - R \cdot 0{,}05 = 95\,\Omega$$

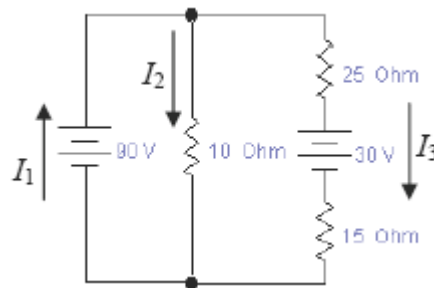
- Limites da corrente:

$$I_{MAX} = \frac{V}{R_{MIN}} = \frac{10}{95} = 0{,}105\ \text{A}$$

$$I_{MIN} = \frac{V}{R_{MAX}} = \frac{10}{105} = 0{,}095\ \text{A}$$

95 mA < I < 105 mA

4.

Determine as correntes que percorrem cada ramo do circuito ao lado.

Resolução:

- Corrente I_2:

$$I_2 = \frac{90}{10} = 9 \text{ A} \quad < \text{- - } \textit{Pela Lei de Ohm}$$

- Corrente I_3:

$$\sum E = \sum R \cdot I$$

$$90 - 30 = 25 \cdot I_3 + 15 \cdot I_3 \qquad < \text{- - } \textit{Pela Lei das Malhas (malha exterior)}$$

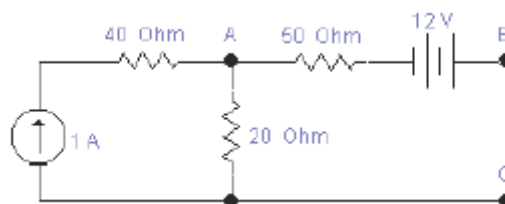
$$I_3 = 1{,}5 \text{ A}$$

- Corrente I_1:

$$I_1 = I_2 + I_3 = 9 + 1{,}5 = 10{,}5 \text{ A} \quad < \text{- - } \textit{Pela Lei dos Nós}$$

I_1 = 10,5 A; I_2 = 9 A; I_3 = 1,5 A

5.

Para o circuito seguinte pretende-se saber as quedas de tensão entre os pontos A e C bem como entre os pontos B e C.

Resolução:

- Corrente na resistência de 50 Ω:

-Como este ramo é aberto a corrente é nula.

- Corrente nas resistências de 40 **Ω** e 20 **Ω**:

A corrente nestas duas resistências é igual e vale 1 A pois é gerada pela fonte de corrente.

- Queda de tensão entre A e C:

A queda de tensão é a queda na resistência de 20 **Ω**, logo:

$$V_{AC} = 20 \cdot 1 = 20\ \text{V}$$

- Queda de tensão entre B e C:

$$V_{BC} = V_{BA} + V_{AC}$$

$$V_{BA} = 12 + 0 \cdot 50 = 12\ \text{V}$$

$$V_{BC} = 12 + 20 = 32\ \text{V}$$

V_{AC} = 20 V; V_{BC} = 32 V

6.

As resistências R_1, R_2 e R_3 estão em série com uma fonte de tensão de 100 V. A queda de tensão total nas resistências R_1 e R_2 é de 50 V, e sobre R_2 e R_3 é 80 V. Sabendo que a soma das três resistências é igual a 50 Ω determine, utilizando o processo do divisor de tensão, o valor de cada uma das resistências.

Resolução:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = 50 \\ \dfrac{100}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_1 + R_2) = 50 \\ \dfrac{100}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_2 + R_3) = 80 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_1 = 10\,\Omega \\ R_2 = 15\,\Omega \\ R_3 = 25\,\Omega \end{cases}$$

7.

Uma corrente de 45 A circula por quatro resistências de 5 Ω, 6 Ω, 12 Ω e 20 Ω que se encontram em paralelo. Com recurso ao processo do divisor de corrente determine a intensidade de corrente em cada uma das resistências.

Resolução:

$$I_{R_5} = \frac{45}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{5}$$

$$I_{R_6} = \frac{45}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{6}$$

$$I_{R_{12}} = \frac{45}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{12}$$

$$I_{R_{20}} = \frac{45}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{20}$$

$$I_{R_5} = 18 \text{ A}$$

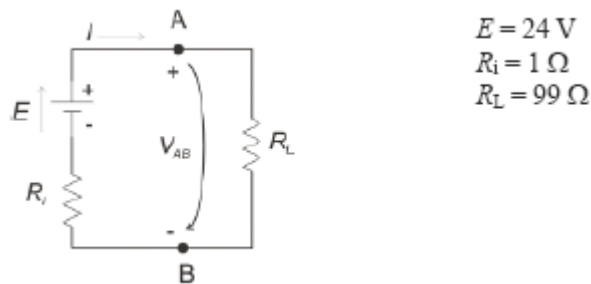
$$I_{R_6} = 15 \text{ A}$$

$$I_{R_{12}} = 7{,}5 \text{ A}$$

$$I_{R_{20}} = 4{,}5 \text{ A}$$

8.

Considere o circuito apresentado na figura seguinte e determine:

$E = 24$ V
$R_i = 1$ Ω
$R_L = 99$ Ω

A) A corrente no circuito (I)

B) A potência consumida (dissipada) pela carga ($P_{cons.}$)

C) A potência produzida pelo gerador ($P_{prod.ger.}$)

D) A potência de perdas no gerador ($P_{perdas.ger.}$ ou P_0)

E) A potência fornecida pelo gerador ($P_{forn.ger.}$)

F) Comente os resultados obtidos nas alíneas B) e E)

Resolução:

A)

$$E = (R_i + R_L) \cdot I$$

$$I = \frac{E}{R_i + R_L} = \frac{24}{1+99}$$

$$I = 0{,}24\ \text{A}$$

B)

$$P_{cons.} = R_L \cdot I^2$$

$$P_{cons.} = 99 \cdot (0{,}24)^2$$

$$P_{cons.} \cong 5{,}7\ \text{W}$$

C)

$$P_{prod.ger.} = E \cdot I$$

$$P_{prod.ger.} = 24 \cdot 0{,}24$$

$$P_{prod.ger.} = 5{,}76\ \text{W}$$

D)

$$P_{perdas} = R_i \cdot I^2$$

$$P_{perdas} = 1 \cdot (0{,}24)^2$$

$$P_{perdas} = 57{,}6\ \text{mW}$$

E)

$$P_{forn.ger.} = P_{prod.ger.} - P_{perdas}$$

$$P_{forn.ger.} = 5{,}76 - 0{,}0576$$

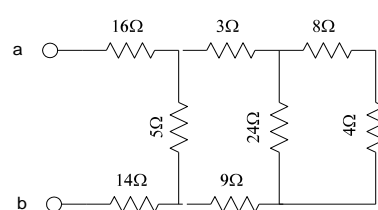
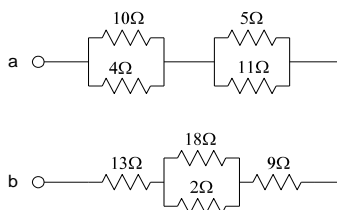
$$P_{forn.ger.} \cong 5{,}7\ \text{W}$$

F)

Neste circuito, como só há uma carga (R_L), a potência fornecida pelo gerador é totalmente consumida por essa carga.

Exercícios Propostos:

1.

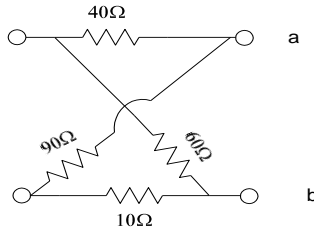
Calcule o valor das resistências equivalentes dos circuitos seguintes:

(Sol: 30.1Ω, 34Ω)

2.

Encontre a resistência total, R_T, do circuito seguinte considerando os terminais a e b:

a) abertos

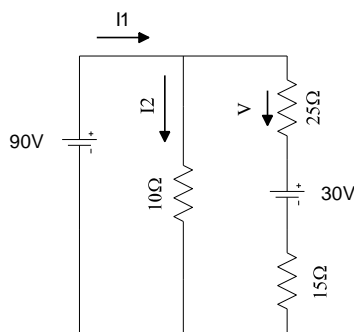
b) curto-circuitados

(Sol: a) 45.5Ω b) 33Ω)

3.

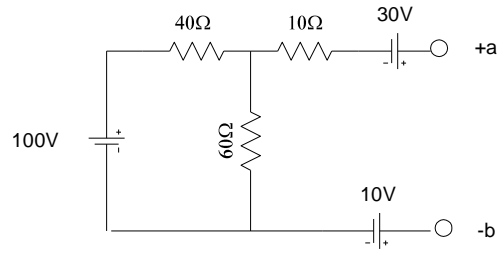
Uma resistência ligada em série com uma outra de 8Ω, consome uma potência de 100W quando é aplicada a ambas uma tensão de 60V. Encontre o valor da resistência desconhecida.

(Sol: R = 16 Ω ou R = 4 Ω)

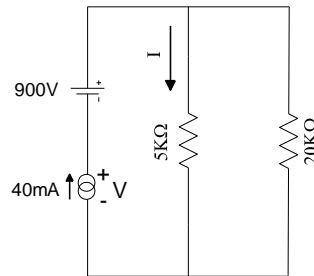
4.

Encontre I_1, I_2, e V no circuito da figura.

(Sol : I_1 = 9A, I_2 = 1.5A, V = 37.5V)

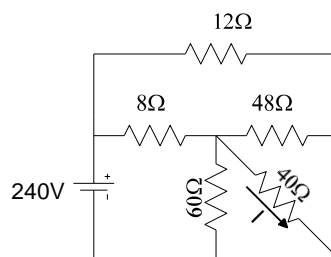
5.

Encontre a tensão V_{ab}, no circuito da figura.

(Sol: V_{ab} = 80V)

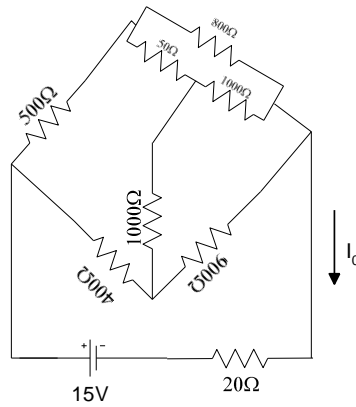
6.

Calcule I e V no circuito da figura.

(Sol: I = 32mA, V = -740V)

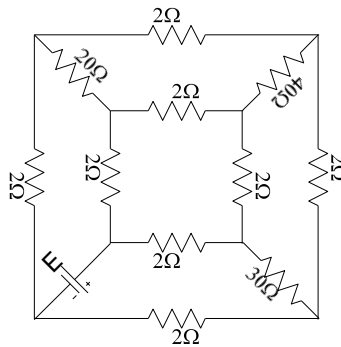
7.

Calcule o valor de I, no circuito da figura.

(Sol: I = 4A)

8.

Reduza o circuito da figura à sua forma mais simples, utilizando a transformação Y–Δ. Determine a corrente I_0.

(Sol: I_0 = 26.82mA)

9.

Considere o circuito seguinte em que E = 10V. Determine as quedas de tensão nas resistências de 20, 30 e 40Ω.

(Sol: V_{20} = 8.1V, V_{30} = 8.4V, V_{40} = 7.8V)

10.

Um gerador eléctrico que funciona 5000 horas por ano, fornece uma corrente de 400A com uma tensão de 6000V. Determine:

a) A potência fornecida ao gerador.

b) A energia produzida anualmente.

c) A potência absorvida sendo o seu rendimento de 95%.

(Sol: a) 2.4 MW b) 12 GWh c) 2.53 MW)

11.

Três resistências, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ e $R_3 = 2\Omega$ estão ligadas em série a uma bateria cuja tensão é 24V. Determine:

a) valor da resistência total.

b) A intensidade da corrente que percorre as resistências.

c) As tensões U_1, U_2 e U_3 aos terminais de cada resistência.

d) A potência total

(Sol: a) 12Ω b) 2A c) 12V/8V/4V d) 48W)

12.

Ligam-se em série duas lâmpadas de 100W/220V. Determine a potência total do conjunto, quando ligado à tensão de 220v.

(Sol: 50W)

13.

O elemento aquecedor de um forno eléctrico é constituído por 5 espirais de condutor eléctrico com 100Ω, cada uma, ligadas em paralelo. Sabendo que a tensão de alimentação é de 220V, calcule:

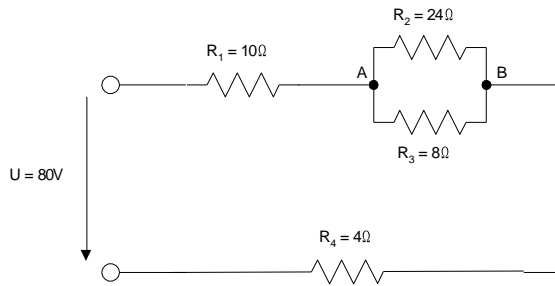
a) A intensidade da corrente absorvida.

b) A resistência equivalente.

c) A potência do forno.

(Sol: a) 2.2A b) 20Ω c) 2.42kW)

14.

Considere o circuito apresentado na figura e determine as seguintes grandezas:

a) A resistência total.

b) A intensidade da corrente total.

c) A tensão aos terminais de R_1 e R_4.

d) A tensão entre os pontos A e B.

e) As intensidades das correntes em R_2 e R_3.

f) A potência total dissipada e a dissipada em R_2.

(Sol: a) 20Ω b) 4A c) 40V/16V d) 24V e) 1A/3A f) 320W/24W)

15.

Um gerador de corrente contínua alimenta com 220V dois irradiadores em paralelo, com 1500W de potência cada um. Determine:

a) A intensidade da corrente absorvida pelos aparelhos.

b) A f.e.m. do gerador sabendo que a sua resistência interna é de 0.5Ω.

(Sol: a) 13.6A b) 226.8V)

16.

Seis pilhas com f.e.m. de 9V e resistência interna de 0.5Ω estão agrupadas em série e alimentam um receptor de 120Ω. Determine:

a) As características do gerador equivalente.

b) A intensidade absorvida pelo receptor.

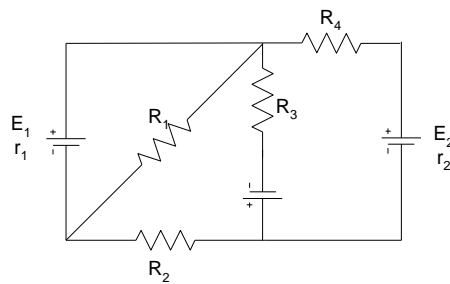
c) A tensão aos terminais do gerador.

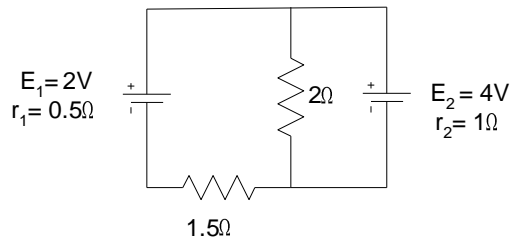
d) A queda de tensão no conjunto das pilhas.

e) As perdas por efeito de Joule nas pilhas.

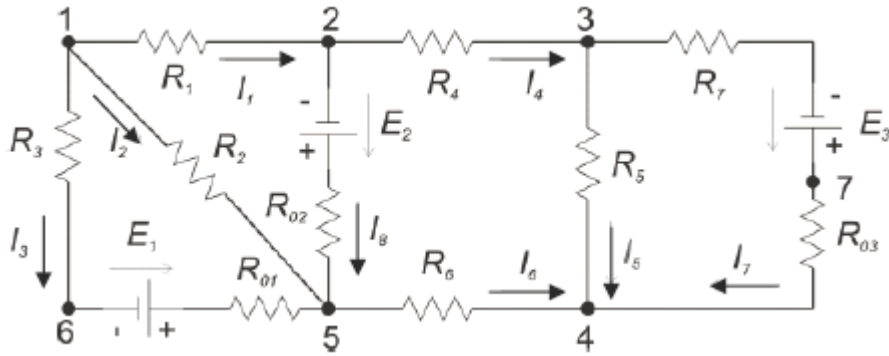
(Sol: a) 54V b) 0.44A c) 52.7V d) 1.3V e) 0.6W)

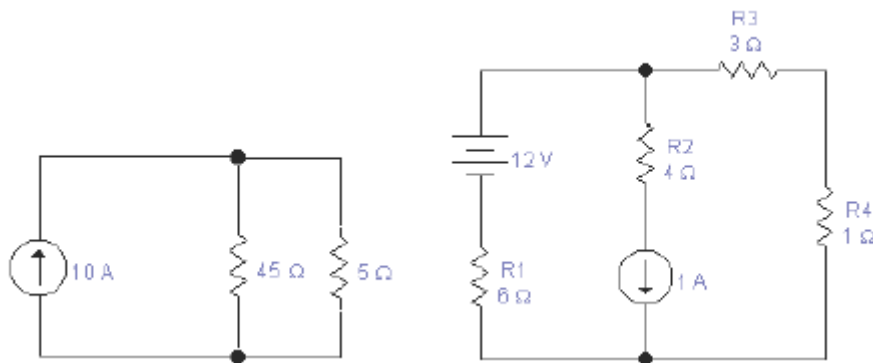
17.

Dado o circuito, escreva as equações que lhe permitem calcular a intensidade das correntes em todos os ramos.

18.

Para o circuito da figura calcule a intensidade da corrente nos diferentes ramos.

(Sol: $I_1 = 0.25A$ $I_2 = 1.5A$ $I_3 = 1.25A$)

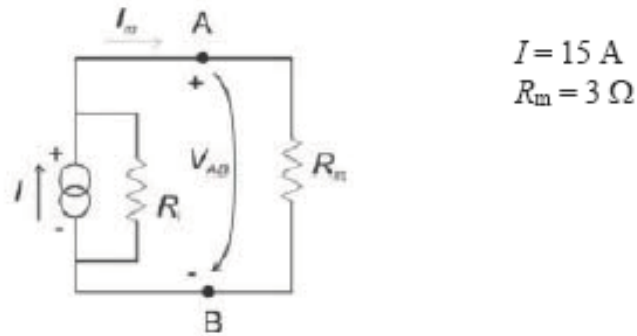
19.

Utilizando as leis de Kirchhoff, escreva o sistema de equações que lhe permitiria calcular o valor das correntes nos ramos do seguinte circuito.

20.

Calcule a corrente que percorre cada uma das resistências dos circuitos apresentados na figura seguinte.

21.

Determine a resistência equivalente do circuito paralelo constituído por resistências de 0,1 kΩ, 150 Ω, 300 Ω e 680 Ω.

22.

O circuito da figura seguinte representa uma fonte de corrente ligada a uma carga Rm. A fonte de corrente tem resistência interna Ri desconhecida e gera uma corrente I. R: A) R_i = 447 Ω; B) P_{cons}. = 666 W; C) $P_{prod.}$ = 670,5 W; D) η = 99,33%; E) R'_i = 2997 Ω;

Determine:

A) Sabendo que a carga é atravessada por uma corrente de 14.9 A, determine o valor da resistência interna da fonte (Ri)

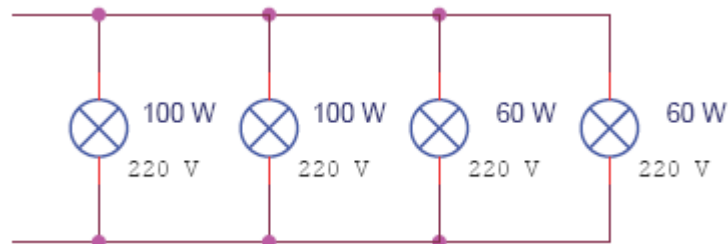
B) A potência consumida pela carga

C) A potência produzida pelo gerador (fonte de corrente)

D) O rendimento do gerador (η)

E) Qual o novo valor de Ri para que o rendimento do gerador fosse de 99.9%

23.

Numa sala encontram-se ligadas em paralelo 4 lâmpadas; 2 de 60 W / 220 V e 2 de 100 W / 220 V.

Determine:

A) A resistência de cada lâmpada

B) A resistência total equivalente do circuito (Req)

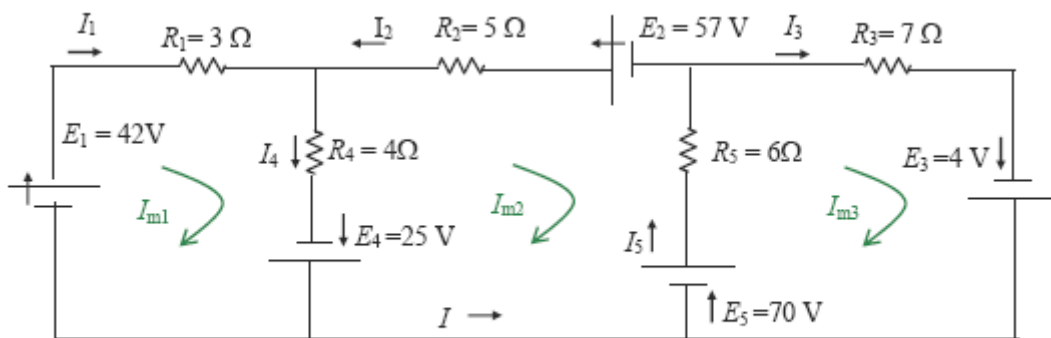
C) A corrente que percorre cada lâmpada

D) A corrente de entrada do circuito

MÉTODO DAS MALHAS INDEPENDENTES

Exercícios Resolvidos:

1.

Determinar as correntes nos ramos, usando o método das correntes de malhas independentes.

$$\begin{cases} E_1 + E_4 = (R_1 + R_4) \cdot I_{m1} - R_4 \cdot I_{m2} \\ -E_4 - E_2 - E_5 = -R_4 \cdot I_{m1} + (R_4 + R_2 + R_5) \cdot I_{m2} - R_5 \cdot I_{m3} \\ E_5 + E_3 = -R_5 \cdot I_{m2} + (R_5 + R_3) \cdot I_{m3} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 67 \\ -152 \\ 74 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix}}_{\Delta = 905} \cdot \begin{vmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{vmatrix}$$

$I_{m1} = 5$ A ; $I_{m2} = -8$ A ; $I_{m3} = 2$ A

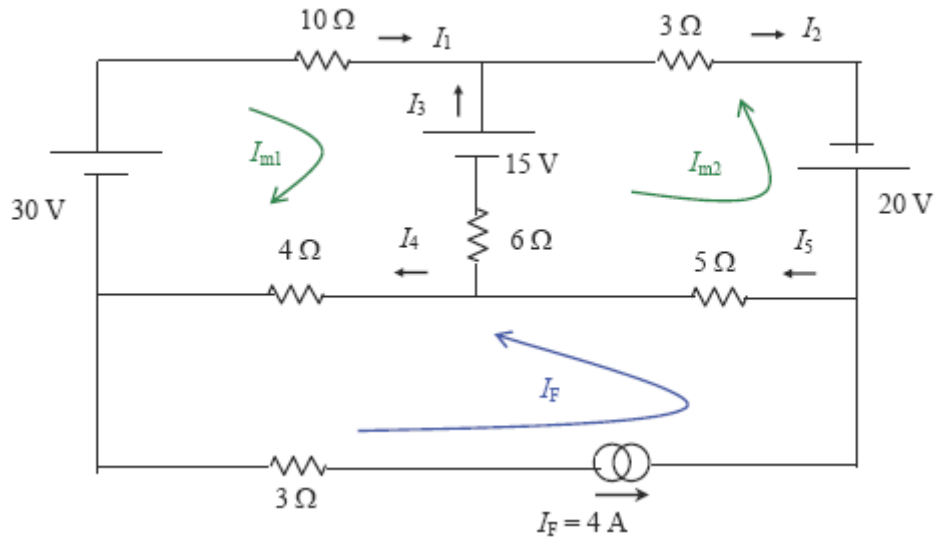
$I_1 = I_{m1}$ -> $I_1 = 5$ A $\qquad$ $I_4 = I_{m1} - I_{m2}$ -> $I_4 = 13$ A

$I_2 = -I_{m2}$ -> $I_2 = 8$ A $\qquad$ $I_5 = -I_{m2} + I_{m3}$ -> $I_5 = 10$ A

$I_3 = I_{m3}$ -> $I_3 = 2$ A $\qquad$ $I = -I_{m2}$ -> $I = 8$ A

R : I_1 = 5 A , I_2 = 8 A , I_3 = 2 A , I_4 = 13 A , I_5 = 10 A e I = 8 A

2.

Utilizar o método das correntes de malhas independentes, para calcular as correntes nos ramos do seguinte circuito.

Resolução:

$$\begin{cases} 30 - 15 = (10 + 6 + 4) \cdot I_{m1} + 6 \cdot I_{m2} + 4 \cdot I_F \\ -20 - 15 = 6 \cdot I_{m1} + (3 + 6 + 5) \cdot I_{m2} - 5 \cdot I_F \end{cases}$$

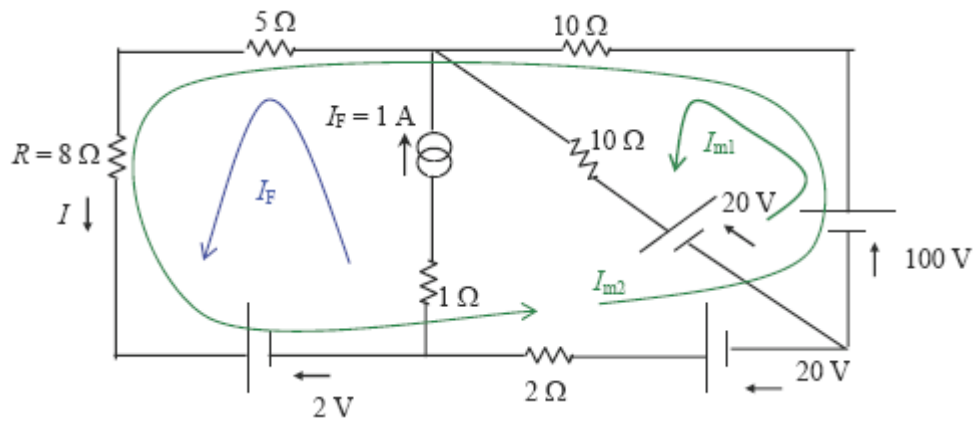
$$\begin{cases} 20 \cdot I_{m1} + 6 \cdot I_{m2} = 15 - 4 \cdot 4 = -1 \\ 6 \cdot I_{m1} + 14 \cdot I_{m2} = -35 + 5 \cdot 4 = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{m1} = 0{,}31 \text{ A} \\ I_{m2} = -1{,}2 \text{ A} \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} I_1 = I_{m1} = 0{,}31 \text{ A} \\ I_2 = -I_{m2} = 1{,}2 \text{ A} \\ I_3 = -I_{m1} - I_{m2} = 0{,}89 \text{ A} \\ I_4 = I_{m1} + I_F = 4{,}31 \text{ A} \\ I_5 = I_F - I_{m2} = 5{,}2 \text{ A} \end{array} \right.$$

R : I_1 = 0,31 A , I_2 = 1,2 A , I_3 = 0,89 A , I_4 = 4,31 A e I_5 = 5,2 A

3.

Determinar a corrente I, usando o método das correntes de malhas independentes.

Resolução:

$$\begin{cases} 100\text{-}20 = (10+10)\cdot I_{m1} + 10\cdot I_{m2} \\ 100\text{-}2\text{-}20 = 10\, I_{m1} + (10 + 5 + 8 + 2)\, I_{m2} + (5 + 8)\, I_F \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80 \\ 65 \end{vmatrix}$$

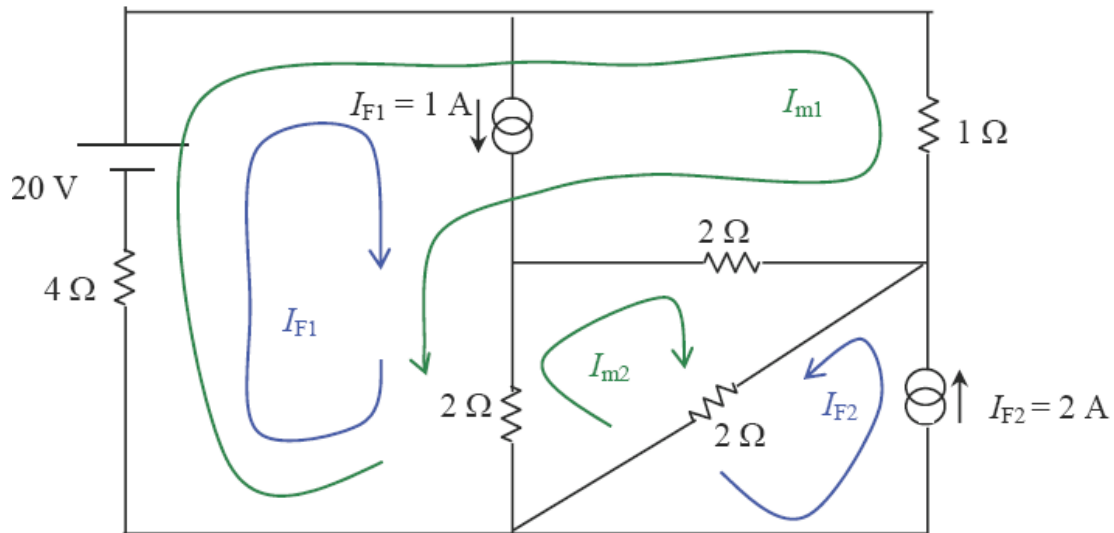
$$I_{m1} = \frac{\begin{vmatrix} 80 & 10 \\ 65 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}} = 3{,}38 \text{ A}$$

$$I_{m2} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 80 \\ 10 & 65 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}} = 1{,}25 \text{ A}$$

$$I = I_F + I_{m2} = 1 + 1{,}25 = 2{,}25 \text{ A}$$

R : I = 2,25 A

4.

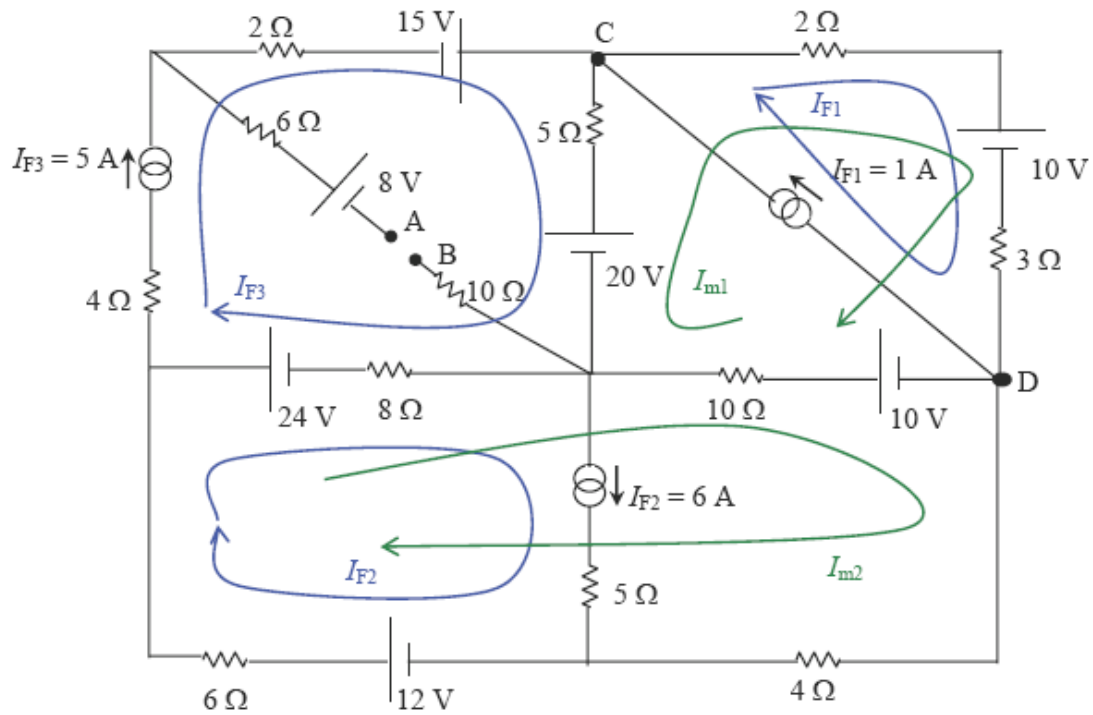
Utilizar o método das correntes de malhas independentes para calcular as correntes de malha I_{m1} e I_{m2}.

$$\begin{cases} 20 = (4+1+2+2)\cdot I_{m1} - (2+2)\cdot I_{m2} + (4+2)\cdot I_{F1} \\ 0 = -(2+2)\cdot I_{m1} + (2+2+2)\cdot I_{m2} - 2\cdot I_{F1} + 2\cdot I_{F2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9\cdot I_{m1} - 4\cdot I_{m2} = 20 - 6\cdot 1 = 14 \\ -4\cdot I_{m1} + 6\cdot I_{m2} = 2\cdot 1 - 2\cdot 2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{m1} = 2\ \text{A} \\ I_{m2} = 1\ \text{A} \end{cases}$$

R : I_{m1} = 2 A e I_{m2} = 1 A

5.

Utilizando o método das correntes de malhas independentes; determinar VCD.

$$\begin{cases} 20-10+10=(5+2+3+10)\cdot I_{m1}-10\cdot I_{m2}+(2+3)\cdot I_{F1}-5\cdot I_{F3} \\ -24-10+12=-10\cdot I_{m1}+(10+4+6+8)\cdot I_{m2}+(6+8)\cdot I_{F2}-8\cdot I_{F3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20\cdot I_{m1}-10\cdot I_{m2}=20-5\cdot 1+5\cdot 5=40 \\ -10\cdot I_{m1}+28\cdot I_{m2}=-22+14\cdot 6+8\cdot 5=102 \end{cases}$$

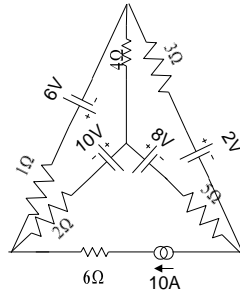
$$\begin{cases} I_{m1}=4{,}65\text{ A} \\ I_{m2}=5{,}35\text{ A} \end{cases}$$

$$V_{CD}=(2+3)\cdot(I_{F1}+I_{m1})+10=5\cdot 5{,}65+10=38{,}25\text{ V}$$

R : V_{CD} = 38,25 V

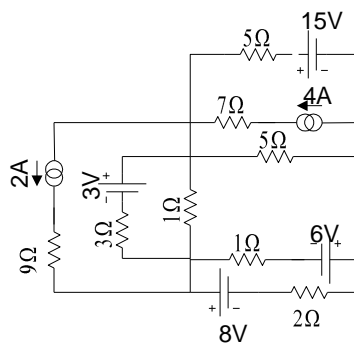
Exercícios Propostos:

1.

Dado o circuito, calcule as correntes nos ramos pelo método das correntes fictícias.

(Sol: I_1 = 4A, I_2 = 6A, I_3 = 6A, I_4 = -2A, I_5 = 4A , I_6 = 10A)

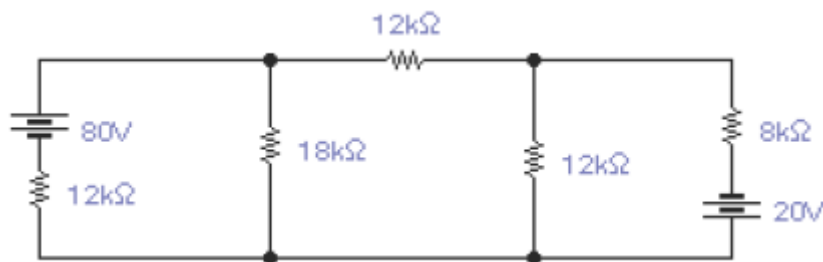
2.

a) Determine as correntes nos ramos do circuito da figura, usando o método das correntes fictícias.

b) Indique qual a potência fornecida pela fonte de corrente de 2A.

MÉTODO DAS TENSÕES NOS NÓS

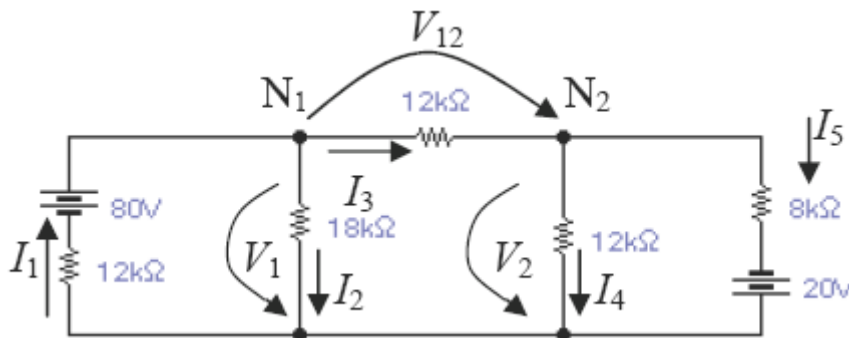
Exercícios Resolvidos:

1.

Calcule todas as tensões e correntes do seguinte circuito pelo método das tensões nos nós.

Resolução:

O circuito tem três nós e três malhas.

Identificamos os nós com N_1 e N_2, sendo o terceiro (parte inferior da figura), considerado de referência, ligado à terra.

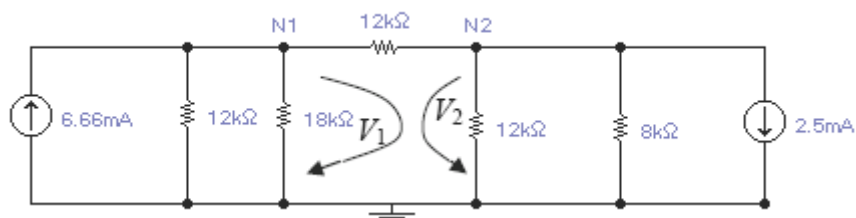
1ª Solução:

$$\begin{cases} nó\ 1 \rightarrow I_1 = I_2 + I_3 \\ nó\ 2 \rightarrow I_3 = I_4 + I_5 \end{cases} \begin{cases} 80 = V_1 + 12 \cdot 10^3 \cdot I_1 \\ V_1 = 18 \cdot 10^3 \cdot I_2 \\ V_{12} = V_1 - V_2 = 12 \cdot 10^3 \cdot I_3 \\ V_2 = 12 \cdot 10^3 \cdot I_4 \\ 20 = -V_2 + 8 \cdot 10^3 \cdot I_5 \end{cases} \begin{cases} I_1 = \dfrac{80 - V_1}{12 \cdot 10^3} \\ I_2 = \dfrac{V_1}{18 \cdot 10^3} \\ I_3 = \dfrac{V_1 - V_2}{12 \cdot 10^3} \\ I_4 = \dfrac{V_{21}}{12 \cdot 10^3} \\ I_5 = \dfrac{20 + V_2}{8 \cdot 10^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{80}{12 \cdot 10^3} - \dfrac{V_1}{12 \cdot 10^3} = \dfrac{V_1}{18 \cdot 10^3} + \dfrac{V_1 - V_2}{18 \cdot 10^3} \quad (nó 1) \\ \dfrac{V_1 - V_2}{12 \cdot 10^3} = \dfrac{V_2}{12 \cdot 10^3} + \dfrac{20}{8 \cdot 10^3} + \dfrac{V_2}{8 \cdot 10^3} \quad (nó 2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos as soluções:

$$\begin{cases} V_1 = 30\ \text{V} \\ V_2 = 0\ \text{V} \\ I_1 = 4{,}166\,\text{mA} \\ I_2 = 1{,}66\,\text{mA} \\ I_3 = 2{,}5\,\text{mA} \\ I_4 = 0\,\text{mA} \\ I_5 = 2{,}5\,\text{mA} \end{cases}$$

2ª Solução:

Transformamos as fontes de tensão em fontes de corrente e obtemos

Escrevemos agora as equações relativas aos nós

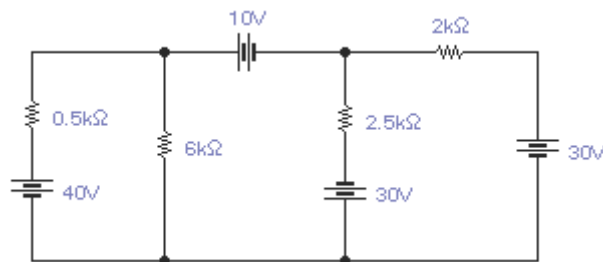
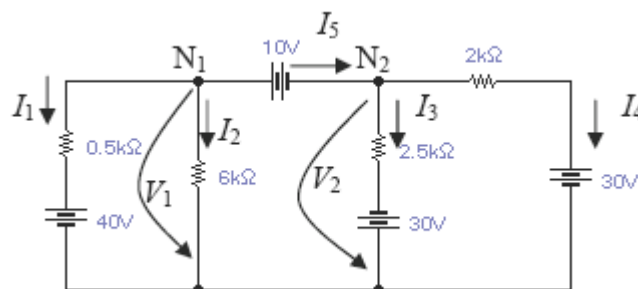
$$\begin{cases} -6{,}666 \cdot 10^{-3} + \dfrac{V_1}{12 \cdot 10^3} + \dfrac{V_1}{18 \cdot 10^3} + \dfrac{V_1 - V_2}{12 \cdot 10^3} = 0 \\ 2{,}5 \cdot 10^{-3} + \dfrac{V_2}{8 \cdot 10^3} + \dfrac{V_2}{12 \cdot 10^3} + \dfrac{V_2 - V_1}{12 \cdot 10^3} = 0 \end{cases}$$

cuja solução é idêntica à anterior:
$$\begin{cases} V_1 = 30\,\text{V} \\ V_2 = 0\,\text{V} \\ I_1 = 4{,}166\,\text{mA} \\ I_2 = 1{,}66\,\text{mA} \\ I_3 = 2{,}5\,\text{mA} \\ I_4 = 0\,\text{mA} \\ I_5 = 2{,}5\,\text{mA} \end{cases}$$

R : V_1 = 30 V, V_2 = 0 V, I_1 = 4,166 mA, I_2 = 1,66 mA, I_3 = 2,5 mA, I_4 = 0 mA,

I_5 = 2,5 mA

2.

Calcule todas as tensões e correntes do seguinte circuito pelo método das tensões nos nós.

Resolução:

1ª Solução:

$$\begin{cases} 40 = -500 \cdot I_1 + V_1 \\ V_1 = 6000 \cdot I2 \\ I_1 + I_2 + I_5 = 0 \\ I_5 = I_3 + I_4 \\ 30 = 2500 \cdot I_3 - V_2 \\ 30 = -2000 \cdot I_4 + V_2 \\ V_1 = V_2 + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - 40}{500} + \dfrac{V_1}{6000} + \dfrac{30 + V_2}{2500} + \dfrac{V_2 - 30}{2000} = 0 \\ V_1 = V_2 + 10 \end{cases}$$

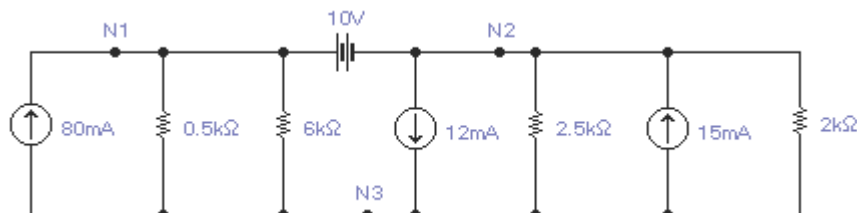
que resolvendo dá V_1=30 V e portanto V_2=20 V

As correntes calculam-se agora facilmente, obtendo então I_1 = -20 mA, I_2 = 5 mA,

I_3 = 20 mA e I_4 = -5 mA, $I_5 = I_3+I_4 = -I_1-I_2$ = 15 mA

2ª Solução:

Transformemos as fontes de tensão em fontes de corrente.

Observação: a fonte de tensão de 10 V não pode ser transformada em fonte de corrente por não ter resistência em série

Há três nós designados por 1, 2 e 3. Consideraremos o nó 3 como referência. Entre o nó 1 e o nó 2 há uma diferença de tensão de 10 V, $V_1 = V_2+10$, ou seja, a tensão de um determina a tensão do outro.

Dão portanto origem a uma única equação:

$$-80+\frac{V_1}{0{,}5}+\frac{V_1}{6}+\frac{V_1-10}{2{,}5}+\frac{V_1-10}{2}+12-15=0$$

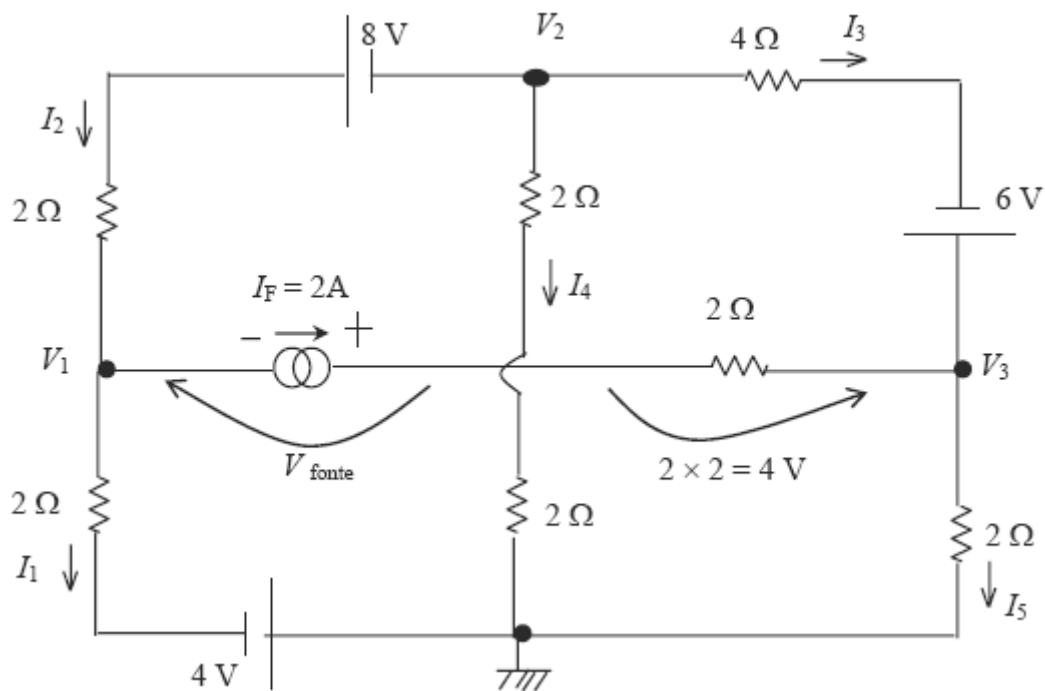
que resolvendo dá V_1 =30 V e portanto V_2 =20 V.

As correntes calculam-se agora facilmente, obtendo então I_1 = -20 mA, I_2 = 5 mA,

I_3 = 20 mA e I_4 = -5 mA, $I_5 = I_3+I_4 = -I_1-I_2$ = 15 mA.

R : I_1 = -20 mA, I_2 = 5 mA, I_3 = 20 mA, I_4 = -5 mA e I_5 = 15mA.

3.

Calcular a potência fornecida pela fonte de corrente

$$P_{\text{fornecida pela fonte}} = V_{\text{fonte}} \cdot I_F$$

$$V_{\text{fonte}} = V_{31} + 4 = V_3 - V_1 + 4$$

Determinação de V_1 e V_3 pelo método da tensão nos nós

$$\textit{equações de nós}\quad \begin{cases} \text{nó } 1 \rightarrow 2 = I_2 - I_1 \\ \text{nó } 2 \rightarrow 0 = I_2 + I_3 + I_4 \\ \text{nó } 3 \rightarrow I_5 = 2 + I_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = -V_1 + 2I_1 & \rightarrow & I_1 = \dfrac{4 + V_1}{2} = 2 + \dfrac{V_1}{2} \\ 8 = 2I_2 + V_{12} & \rightarrow & I_2 = \dfrac{8 - (V_1 - V_2)}{2} = \dfrac{8 + V_2 - V_1}{2} = 4 + \dfrac{V_2}{2} - \dfrac{V_1}{2} \\ 6 = 4I_3 + V_{32} & \rightarrow & I_3 = \dfrac{6 - (V_3 - V_2)}{4} = \dfrac{6 + V_2 - V_3}{4} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{V_2}{4} - \dfrac{V_3}{4} \\ 0 = V_2 - 4I_4 & \rightarrow & I_4 = \dfrac{V_2}{4} \\ 0 = V_3 - 2I_5 & \rightarrow & I_5 = \dfrac{V_3}{2} \end{cases}$$

e substituindo as correntes (I_x) nas equações de nós

$$\begin{cases} 2 = 4 + \dfrac{V_2}{2} - \dfrac{V_1}{2} - 2 - \dfrac{V_1}{2} \\ 4 + \dfrac{V_2}{2} - \dfrac{V_1}{2} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{V_2}{4} - \dfrac{V_3}{4} + \dfrac{V_2}{4} = 0 \\ 2 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{V_2}{4} - \dfrac{V_3}{4} = \dfrac{V_3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -V_1 + \dfrac{1}{2}V_2 + 0\,V_3 \\ \dfrac{11}{2} = 5{,}5 = \dfrac{V_1}{2} - V_2 + \dfrac{V_3}{4} \\ \dfrac{7}{2} = 3{,}5 = 0\,V_1 - \dfrac{V_2}{4} + \dfrac{3}{4}V_3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 5{,}5 \\ 3{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} \times \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}25 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}75 \end{vmatrix}}_{0{,}75-(0{,}5^2\times 0{,}75)-0{,}25^2=0{,}5}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 5,5 & -1 & 0,25 \\ 3,5 & -0,25 & 0,75 \end{vmatrix}}{0,5} = -3,25 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 5,5 & 0,25 \\ 0 & 3,5 & 0,75 \end{vmatrix}}{0,5} = -6,5 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 5,5 \\ 0 & -0,25 & 3,5 \end{vmatrix}}{0,5} = 2,5 \text{ V}$$

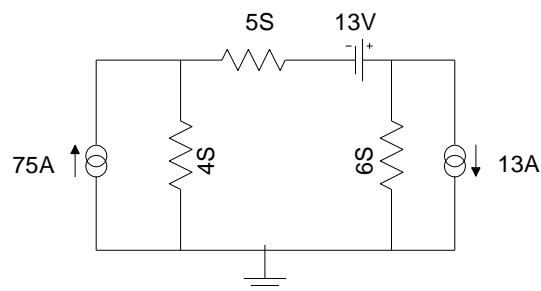
$$V_{\text{fonte}} = V_3 - V_1 + 4 = 2,5 - (-3,25) + 4 = 9,75 \text{ V}$$

$$P_{\text{fornecida pela fonte}} = V_{\text{fonte}} \cdot I_F = 9,75 \cdot 2 = 19,5 \text{ W}$$

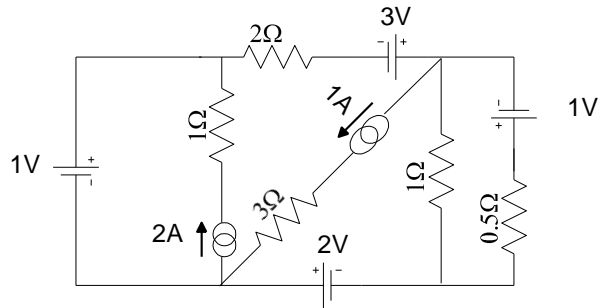
R : $P_{\text{fornecida pela fonte}}$ = 19,5 W

Exercícios Propostos:

1.

Determine o valor das tensões nos nós do circuito da figura, usando o método das tensões nos nós.

(Sol: V_1 = 5V, V_2 = 7V)

2.

Determine o valor das correntes nos ramos do circuito da figura usando o método das tensões nos nós.

(Sol: I_1 = 1A, I_2 = 3A, I_3 = 0A, I_4 = 2A, I_5 = 2A)

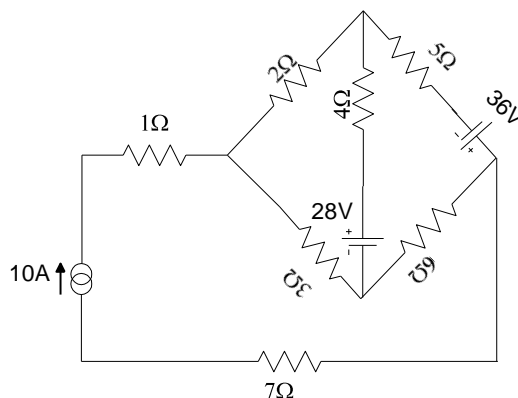
3.

Para o circuito da figura,

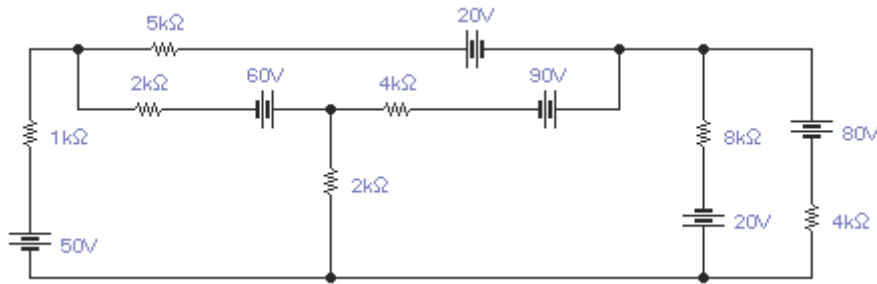
a) Escreva um sistema de equações que permita resolver o circuito a partir das leis de Kirchoff.

b) Calcule as correntes nos ramos pelo método das correntes fictícias e tensões nos nós.

c) Calcule as correntes nos ramos pelo teorema da sobreposição.

d) Verifique o princípio de conservação de energia no circuito.

(Sol: I_1 = 10A, I_2 = 4.42A, I_3 = 5.58A, I_4 = -5.02A, I_5 = 9.44A , I_6 = 0.56A)

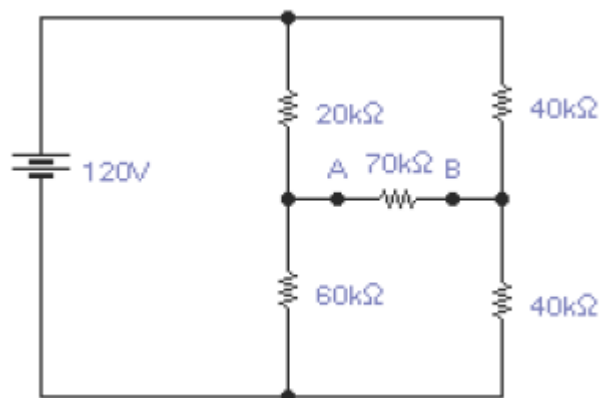
4.

Calcule as tensões em todos os nós do seguinte circuito (use o método das tensões nos nós).

TEOREMAS DE THÈVENIN E NORTON

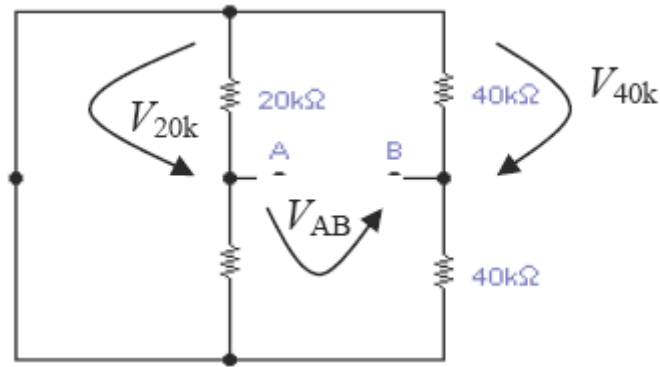
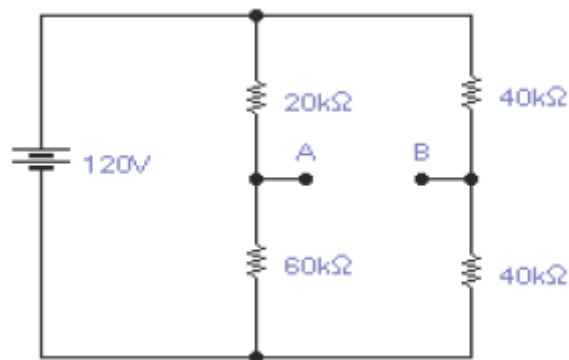
Exercícios Resolvidos:

1.

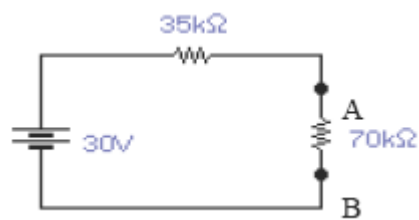
Calcule o circuito equivalente ao circuito dado utilizando o teorema de Thèvenin.

Determine a tensão e a corrente na resistência de carga de 70 kΩ.

<u>Resolução:</u>

Cálculo da resistência de Thèvenin

$R_{Th} = (20.10^3//60.10^3) + (40.10^3//40.10^3) = 35\ k\Omega$

Cálculo da tensão de Thèvenin V_{Th}=V_{AB}

$$V_{Th} = V_{AB} = V_{40k} - V_{20k}$$

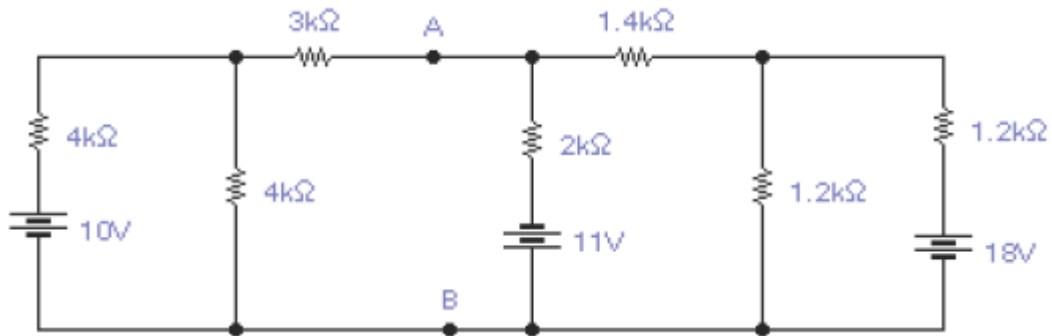
$$V_{Th} = \frac{120 \cdot 40 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^3} - \frac{120 \cdot 20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3 + 60 \cdot 10^3} = 30\,\text{V}$$

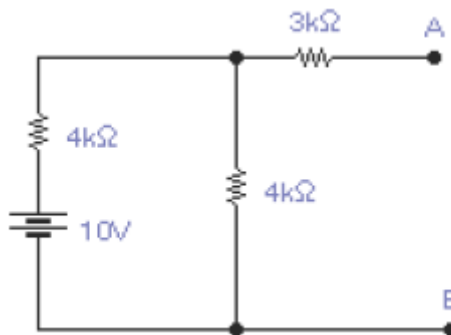
O circuito equivalente será então

$I = 30 / (35.10^3 + 70.10^3) = 0,28$ mA

$V = I . 70.10^3 = 20$ V

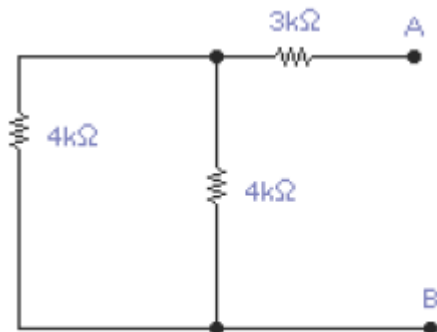
R: I = 0,28 mA e V = 20 V

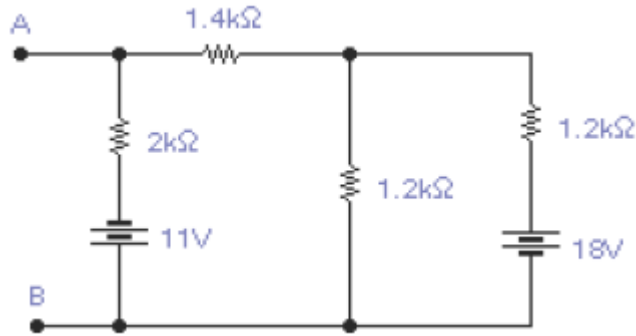
2.

Calcule o circuito equivalente de Thèvenin, (para ambos os lados) relativamente aos pontos A e B no circuito dado. No circuito equivalente, determine a corrente que flúi entre os pontos A e B.

Resolução:

Lado esquerdo

Podemos calcular já a partir deste circuito a tensão de Thèvenin

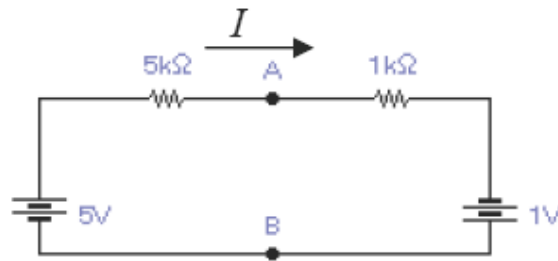
$V_{Th} = 10 \cdot 4 \cdot 10^{3} \cdot (4 \cdot 10^{3} + 4 \cdot 10^{3}) = 5\ V$

A resistência será calculada a partir de

$$R_{Th} = (4 \cdot 10^{3} // 4 \cdot 10^{3}) + 3 \cdot 10^{3} = 5\ k\Omega$$

Lado direito:

A tensão de Thèvenin será calculada analisando este circuito

$V_{Th} = -1$ V

Sendo calculada facilmente $R_{Th} = 1$ kΩ

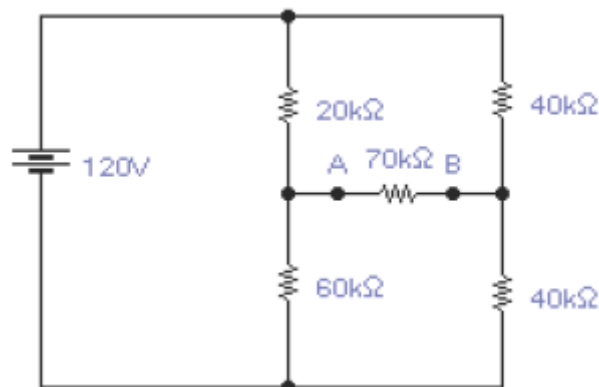
O circuito equivalente será

A corrente que percorre o circuito será:

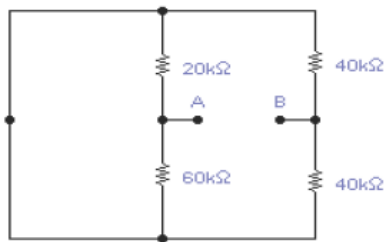
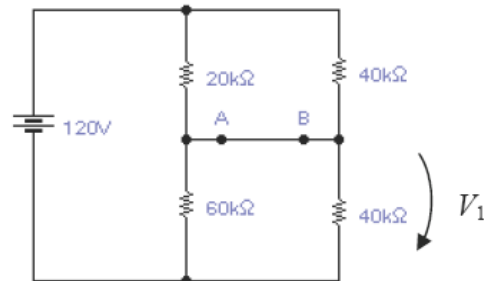
$I = (5 + 1) / (5 . 10^3 + 1 . 10^3) = 1$ mA

R: $V_{Th_direito} = 5$ V, $R_{Th_direito} = 5$ kΩ, $V_{Th_esquerdo} = -1$ V, $R_{Th_esquerdo} = 1$ kΩ,

3.

Calcule o circuito equivalente ao circuito dado utilizando o teorema de Norton.

Determine a tensão e a corrente na resistência de carga de 70 kΩ.

Resolução:

Cálculo da resistência de Norton:

$R_N = (20{\cdot}10^3 \,//\, 60{\cdot}10^3) + (40{\cdot}10^3 \,//\, 40{\cdot}10^3) = 35\ k\Omega$

Cálculo da corrente de Norton ($I_N = I_{AB}$):

$I_N = I_{20k} - I_{60k}$

$$V_1 = 120 * \frac{(60 \cdot 10^3 \,//\, 40 \cdot 10^3)}{(20 \cdot 10^3 \,//\, 40 \cdot 10^3) + (60 \cdot 10^3 \,//\, 40 \cdot 10^3)} = 77{,}15\text{V} \ (\textit{divisor de tensão})$$

$$I_{20k} = \frac{120 - 77{,}15}{20 \cdot 10^3} = 2{,}14\,\text{mA}$$

$$I_{60k} = \frac{77{,}15}{60 \cdot 10^3} = 1{,}29\,\text{mA}$$

$$I_N = 2{,}14 \cdot 10^{-3} - 1{,}29 \cdot 10^{-3} = 0{,}854\,\text{mA}$$

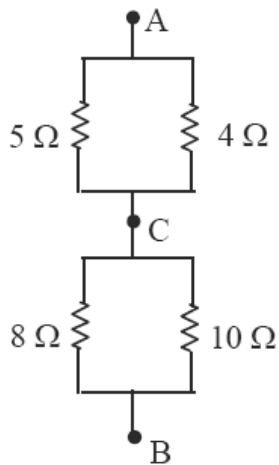
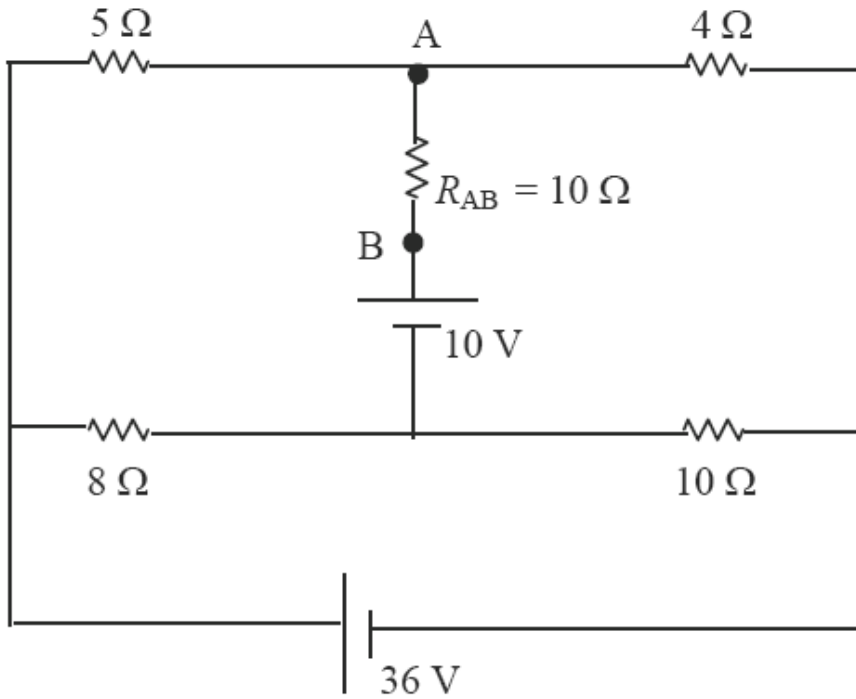
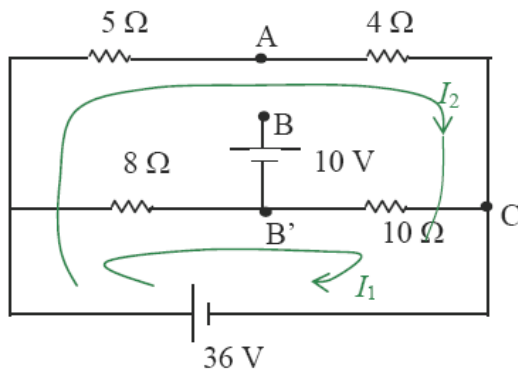
O circuito equivalente será então:

$I_{AB} = 0{,}854 \ . \ 10^{-3} \ . \ 35 \ . \ 10^3 / (35 \ . \ 10^3 + 70 \ . \ 10^3) = 0{,}28$ mA

$V_{AB} = I_{AB} \ . \ 70 \ . \ 10^3 = 20$ V

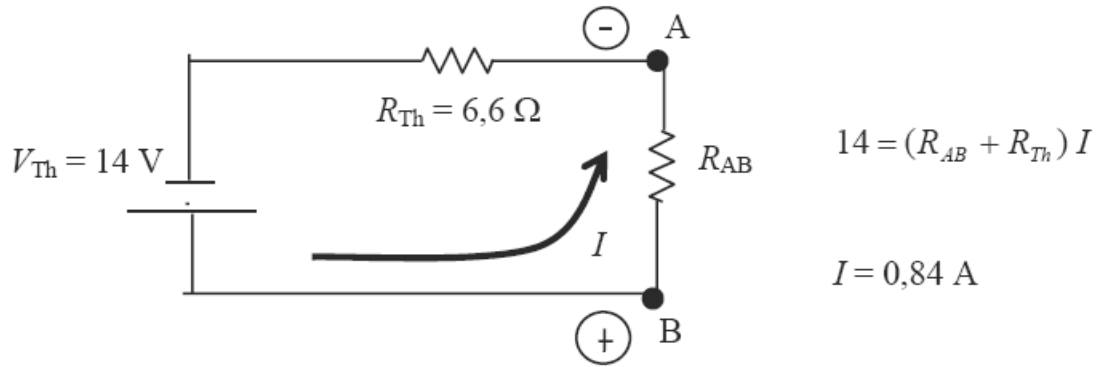
R: $I_N = 0{,}85$ mA, $R_N = 70$ kΩ, $V_{AB} = 20$ V e $I_{AB} = 0{,}28$ mA

4.

Determinar a corrente na resistência $R_{AB} = 10\ \Omega$, utilizando o teorema de Thèvenin.

$$R_{Th} = (5 // 4) + (8 // 10) = \frac{20}{9} + \frac{80}{18} = 6{,}6\ \Omega$$

$$I_1 = \frac{36}{18} = 2\ \text{A}$$

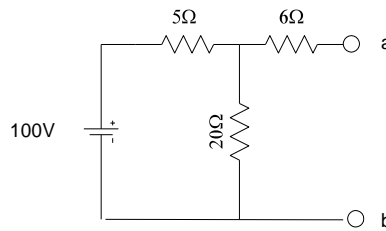
$$I_2 = \frac{36}{9} = 4\ \text{A}$$

$$(V_{AB})_{c.a.} = (V_{AC})_{c.a.} + (V_{CB'})_{c.a.} + (V_{B'B})_{c.a.}$$

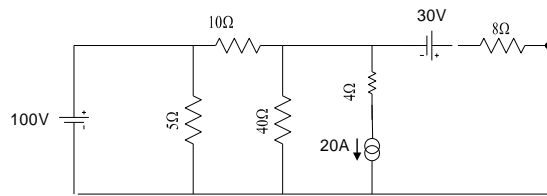
$$V_{Th} = (V_{AB})_{c.a.} = 4 \cdot I_2 + 10 \cdot (-I_1) - 10 = 4 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 10 = -14\ \text{V} \quad \Rightarrow V_{BA} = 14\ \text{V}$$

R: I=0,84 A

Exercícios Propostos:

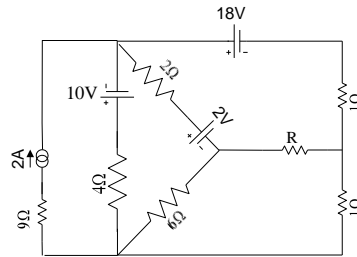
1.

Diga qual o valor da resistência que solicita uma corrente de 5A quando ligada aos terminais a e b do circuito da figura.

(Sol: R = 6 Ω)

2.

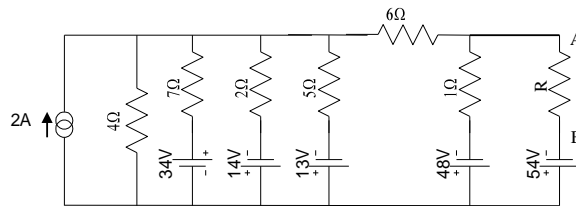
Encontre o equivalente de Norton para o seguinte circuito:

(Sol: $R_{th} = 16\Omega$, $V_{th} = -50V$)

3.

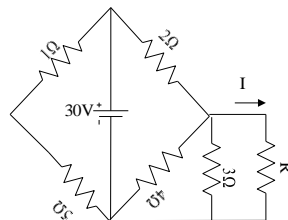
Para o circuito da figura:

a) Determine R de modo que a corrente que a percorre seja de 1A.
b) Confirme o valor obtido em a).

(Sol: R = 7.93 Ω)

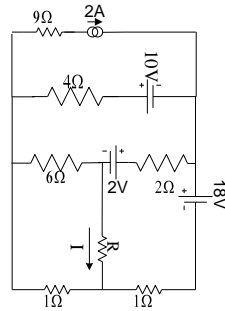
4.

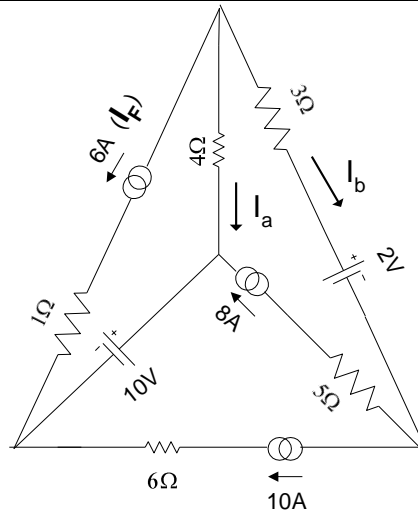
Determine R para que a corrente que nela passa seja de 2A de A para B.

(Sol: R = 5 Ω)

5.

Usando o teorema de Thèvenin, calcular R de modo que a corrente que nela passa seja de 2A.

(Sol: R = 6 Ω)

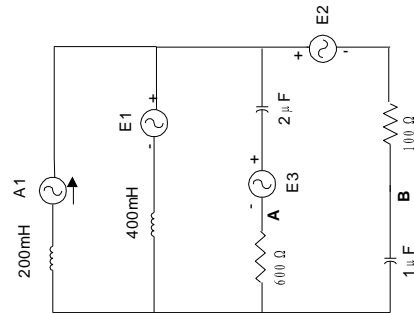
6.

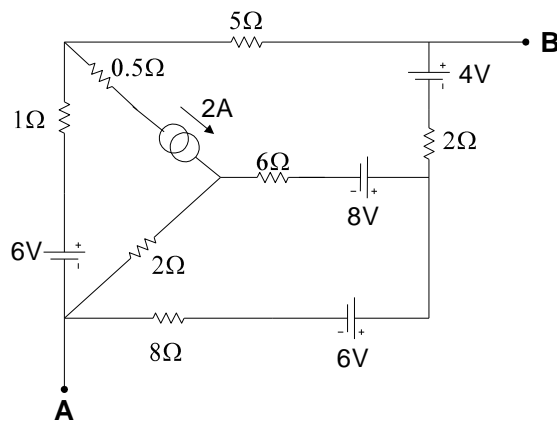
Utilizando o Teorema de Thèvenin, calcule o valor de R no circuito da figura, de modo que a corrente que a percorre seja 1A.

7.

Considere o circuito da figura.

a) Utilizando o método das tensões nos nós, determine os valores de I_a e I_b.

b) Que alterações introduziria no circuito, se pretendesse diminuir a potência fornecida pela fonte de corrente I_F para 50% do seu valor actual, mantendo o valor de I_F e não alterando as potências fornecidas pelas outras fontes.

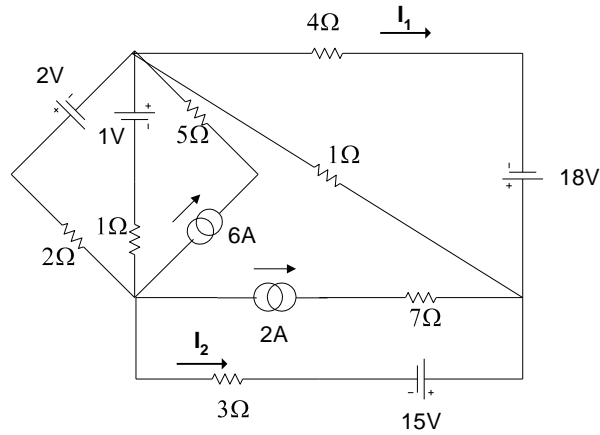
8.

Determine o equivalente de Thèvenin do circuito da figura, visto dos terminais A e B.

9.

Calcule o equivalente de Thèvenin e Norton do bipolo AB, a partir do Teorema de Thèvenin. Use como método auxiliar, o método das correntes de malhas independentes (método das correntes fictícias).

10.

Para o circuito da figura, calcule:

a) As correntes I_1 e I_2, usando o método das tensões nos nós.

b) A potência em jogo na fonte de tensão de 1V e na fonte de corrente de 2A.

11.

Calcule, utilizando o teorema de Thèvenin, o circuito equivalente ao circuito dado visto de R_L. Calcule a corrente e a tensão em R_L.